

Méth. Mat. Phys. - Chapitre 3

Fonction gamma



3.1 Propriétés

3.2 Pôles et résidus

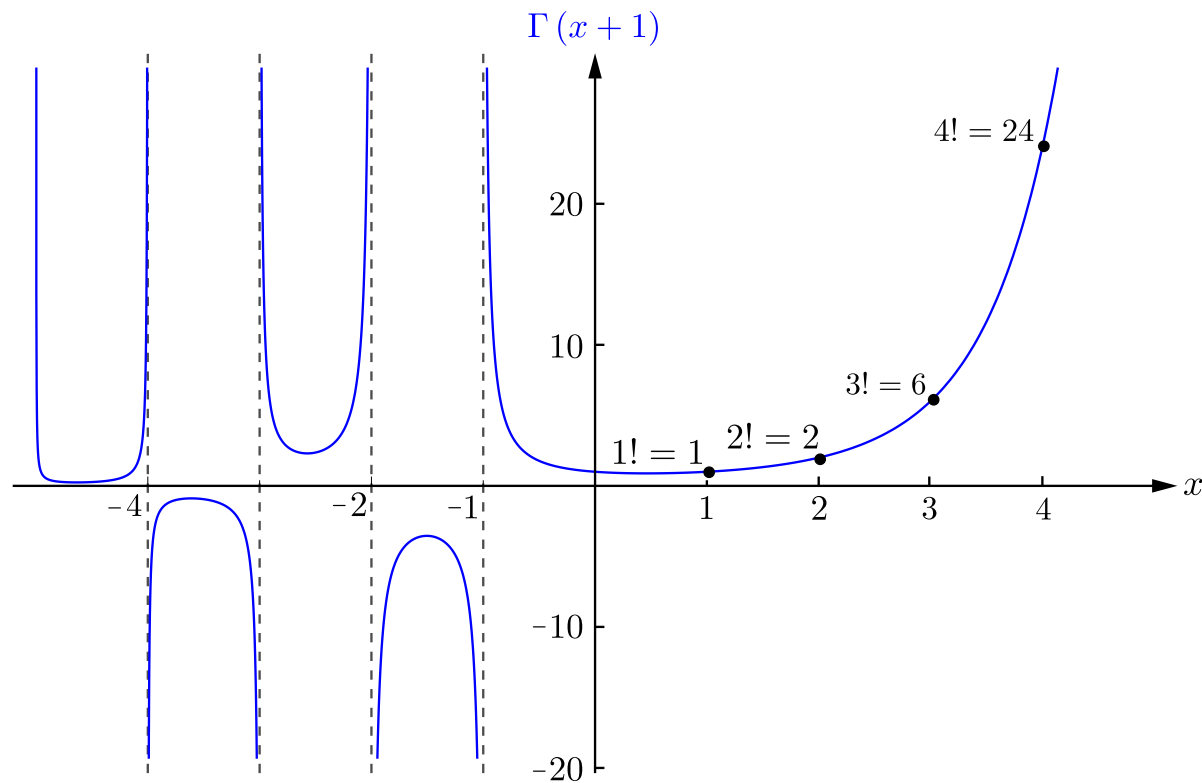
3.3 Développement en produit

3.4 Formule de Stirling

3.5 Thermodynamique statistique

- **Fonction gamma réelle** : généralisation de $f(n) = n! : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

(3.3)



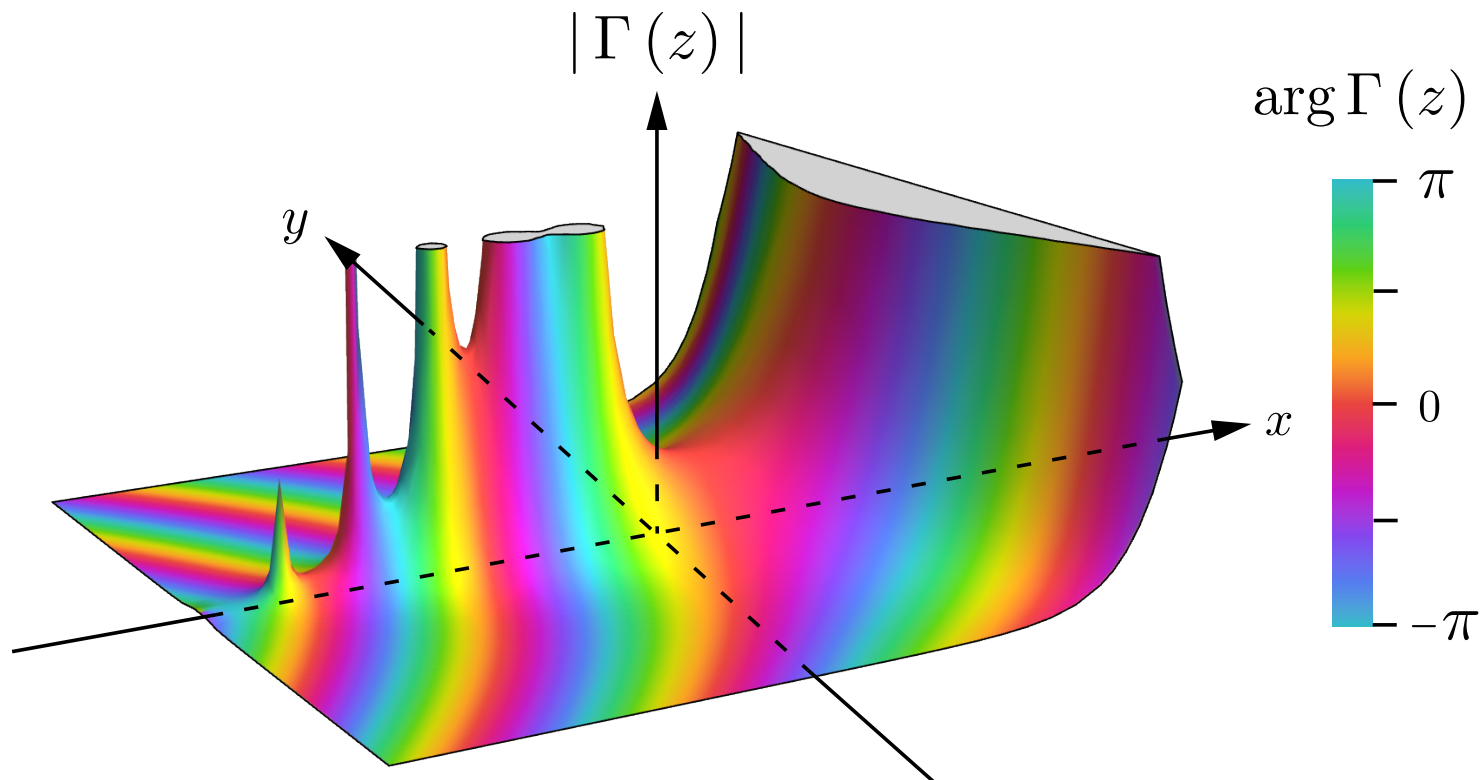
- **Factorielle** : propriété fondamentale

(3.4)

- **Fonction gamma complexe** : généralisation de $f(n) = n! : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$

(3.6)

$$\Gamma(z) = |\Gamma(z)| e^{i \arg \Gamma(z)}$$



- **Relation de récurrence complexe** : intégration par parties

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt = -t^z e^{-t} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} z t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= z \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = z \Gamma(z)\end{aligned}$$

(3.7)

- **Valeur particulière** : $z = 1$

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = 1 \quad (3.8)$$

- **Relation de récurrence** : $\subset \mathbb{N}$

$$\Gamma(n+1) = n \Gamma(n) = n! \Gamma(1) = n! \quad \square \quad (3.9)$$

- **Factorielle de zéro** : $z = 0$

$$0! = \Gamma(1) = 1 \quad (3.10)$$

- **Domaine d'analyticité :** $\Gamma(z) : \operatorname{Re}(z) > 0$

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} = \dots = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\dots(z+n)} \quad (3.13)$$

où $\Gamma(z+n+1)$ est analytique si $\operatorname{Re}(z) > -(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

- **Pôles :** $\Gamma(z)$ pour $\operatorname{Re}(z) \leq 0$

$$(3.14)$$

- **Résidu :** $z = -n$ dans (3.14)

$$\operatorname{Res}_{z=-n} \Gamma(z) = \lim_{z \rightarrow -n} \frac{\Gamma(1)}{(-n)(-n+1)\dots(-1)} = \frac{(-1)^n}{n!} \quad (3.15)$$

- **Somme des résidus :**

$$(3.16)$$

- **Domaine de convergence :** $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$

- **Fonction gamma :**

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt \quad (3.17)$$

- **Changement de variable :**

$$u = \frac{t}{n} \quad \text{et} \quad du = \frac{dt}{n} \quad (3.18)$$

- **Fonction gamma : intégration par parties**

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^z \int_0^1 (1-u)^n u^{z-1} du \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^z \left(\frac{u^z (1-u)^n}{z} \Big|_0^1 + \frac{n}{z} \int_0^1 (1-u)^{n-1} u^z du \right) \quad (3.20) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^z \frac{n}{z} \int_0^1 (1-u)^{n-1} u^z du = \dots (n-1 \text{ fois}) \dots \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^z \frac{n(n-1)\dots 1}{z(z+1)\dots(z+n-1)} \int_0^1 u^{z+n-1} du \end{aligned}$$

- **Fonction gamma : intégration**

$$\begin{aligned}
 \Gamma(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^z \frac{n(n-1)\dots 1}{z(z+1)\dots(z+n-1)} \int_0^1 u^{z+n-1} du \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^z \frac{n(n-1)\dots 1}{z(z+1)\dots(z+n)} u^{z+n} \Big|_0^1 \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^z \frac{n(n-1)\dots 1}{z(z+1)\dots(z+n)}
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

- **Fonction gamma : intégration**

$$\tag{3.22}$$

- **Constante d'Euler-Mascheroni :**

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n) \right) \simeq 0.5772156649 \tag{3.24}$$

- **Fonction gamma :**

$$\begin{aligned}
 \Gamma(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{z(z+1)\dots(z+n)} n^z \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\dots\left(1+\frac{z}{n}\right)} e^{z \ln n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-z\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n\right)}}{z} \frac{e^z e^{\frac{z}{2}} \dots e^{\frac{z}{n}}}{\left(1+z\right)\left(1+\frac{z}{2}\right)\dots\left(1+\frac{z}{n}\right)} \\
 &= \frac{e^{-\gamma z}}{z} \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{e^{z/k}}{1+\frac{z}{k}}
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

- **Fonction gamma :** développement en produit

(3.25)

- **Factorielle :**

$$n! = \Gamma(n + 1) = \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt = \int_0^{\infty} e^{n \ln t - t} dt = \int_0^{\infty} f(t) dt \quad (3.26)$$

- **Etude de fonction :** $f(t)$ avec un extremum en t^*

- $f'(t^*) = \left(\frac{n}{t^*} - 1\right) e^{n \ln t^* - t^*} = 0$ ainsi $t^* = n$ (3.28)

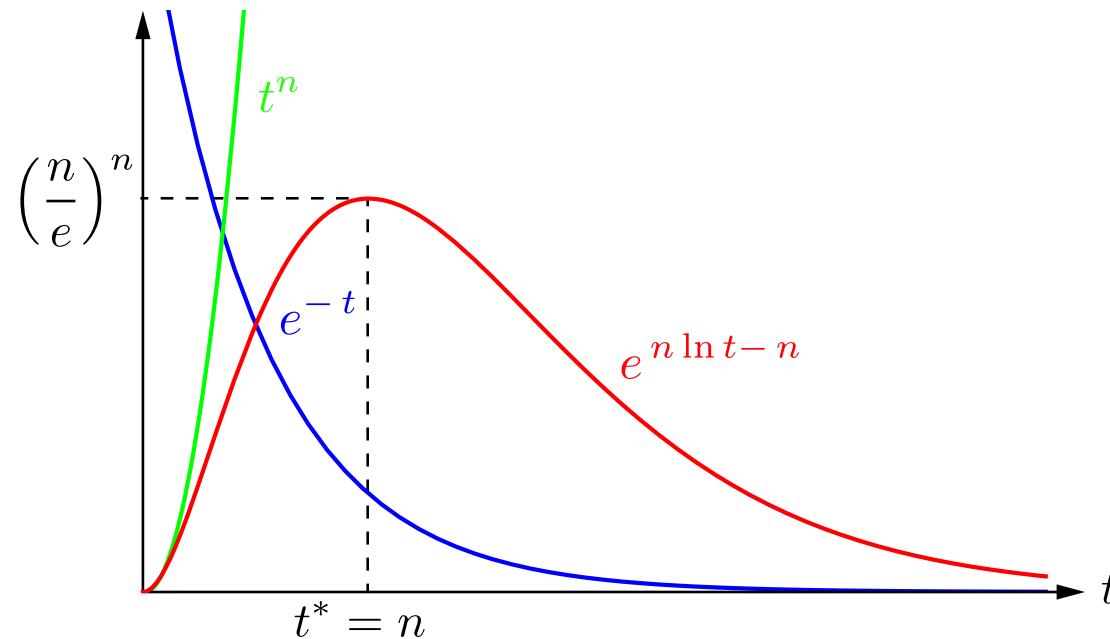
- $f(t^*) = e^{n \ln t^* - t^*} = e^{n \ln n - n} = n^n e^{-n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n$ (3.29)

- $f''(t^*) = \left(-\frac{n}{t^{*2}} + \left(\frac{n}{t^*} - 1\right)^2\right) f(t^*) = -\frac{1}{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n < 0$ (3.30)

- $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0} t^n e^{-t} = \lim_{t \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{k+n}}{k!} = 0$ (3.31)

- $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (t^{-n} e^t)^{-1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k-n}}{k!}\right)^{-1} = 0$ (3.32)

- **Intégrant** : $f(t) = e^{n \ln t - t}$: gaussienne déformée (maxwellienne)



- **Ecart type** :

$$\sigma \simeq \sqrt{n} \quad (3.33)$$

- **Changement de variable** : autour de $t^* = n$

$$t = t^* + \sigma s = n + \sqrt{n} s \quad \text{ainsi} \quad s = \frac{t - n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad dt = \sqrt{n} ds \quad (3.34)$$

- **Factorielle** : développement asymptotique autour d'une gaussienne

$$n! = \sqrt{n} \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{-n - \sqrt{n}s + n \ln\left(n\left(1 + \frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right)} ds \quad (3.36)$$

$$= \sqrt{n} \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{n \ln n - n} e^{-\sqrt{n}s} e^{n \ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{n}}\right)} ds \quad (3.37)$$

$$= \sqrt{n} \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{-n\left(\frac{s}{\sqrt{n}} - \ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right)} ds \quad (3.38)$$

$$= \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{-n\left(\frac{s}{\sqrt{n}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(-\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^k\right)} ds \quad (3.40)$$

$$= \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}s^2 - n \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k} \left(-\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^k\right) ds$$

$$= \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} \prod_{k=3}^{\infty} \exp\left(-\frac{n}{k} \left(-\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^k\right) ds \quad (3.41)$$

$$= \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} \prod_{k=3}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(-\frac{n}{k} \left(-\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^k\right)^j ds \quad (3.43)$$

- **Développement limité** : $s \ll 1$ ainsi $j = 0, 1$ et $k = 3, 4, 5$

$$\prod_{k=3}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(-\frac{n}{k} \left(-\frac{s}{\sqrt{n}} \right)^k \right)^j = \prod_{k=3}^5 \left(1 - \frac{n}{k} \left(-\frac{s}{\sqrt{n}} \right)^k + \mathcal{O}(s^{2k}) \right)$$

$$= 1 + \frac{s^3}{3n^{1/2}} - \frac{s^4}{4n} + \frac{s^5}{5n^{3/2}} + \mathcal{O}(s^6) \quad (3.45)$$

- **Intégrale d'une gaussienne** : $t = -\frac{s^2}{2}$ et $ds = -\frac{dt}{s} = -\frac{dt}{\sqrt{2t}}$

$$\int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds \simeq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = 2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds \quad (3.48)$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt = \sqrt{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2\pi}$$

- **Factorielle** : terme dominant et termes correctifs

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (3.49)$$

$$+ \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} \left(\frac{s^3}{3n^{1/2}} - \frac{s^4}{4n} + \frac{s^5}{5n^{3/2}} + \mathcal{O}(s^6) \right) ds$$

- **Série de Stirling** : résultat de l'intégrale (3.49)

$$(3.50)$$

- **Développement asymptotique** : série de Stirling

$$\frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{n^k} \quad (3.51)$$

- **Coefficients** : série de Stirling (3.52)

$$a_k = (2k + 1)!! b_{2k+1} \quad \text{où} \quad b_k = \frac{1}{k+1} \left(b_{k+1} - \sum_{j=2}^{k-1} j b_j b_{k+1-j} \right)$$

- **Limite des grands nombres** : série de Stirling

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{n^k} \simeq 1 \quad (3.54)$$

- **Formule de Stirling** : approximation : limite des grands nombres n

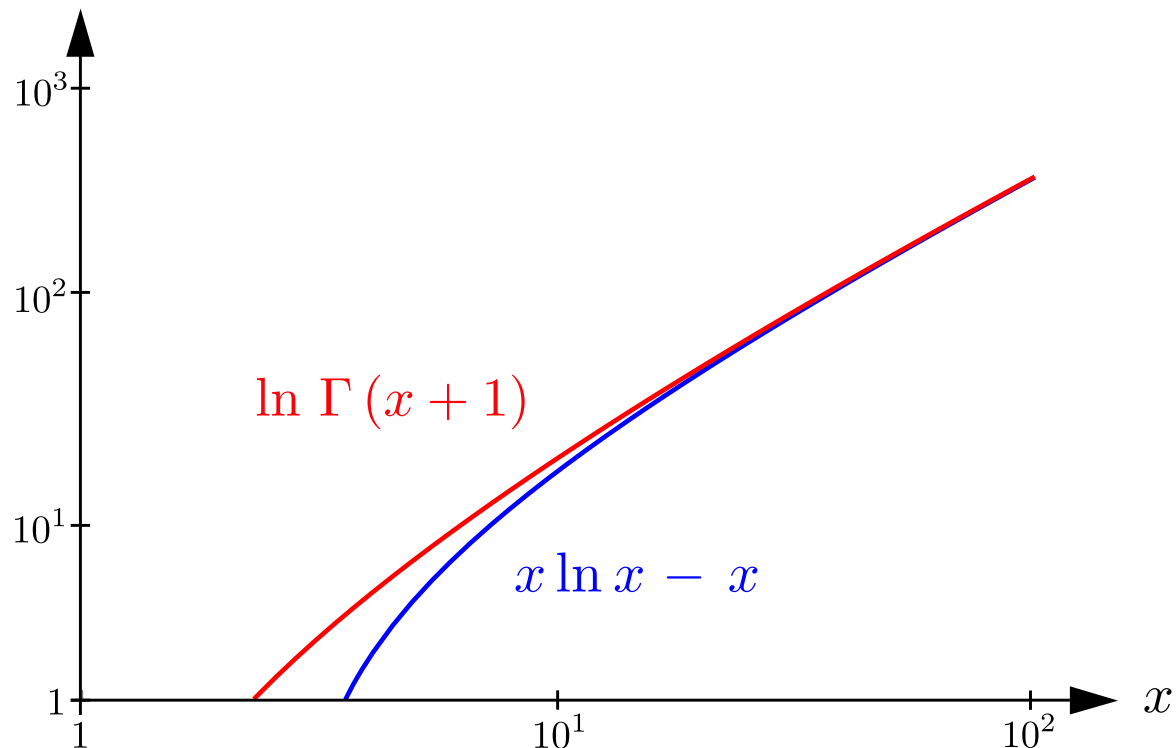
$$(3.55)$$

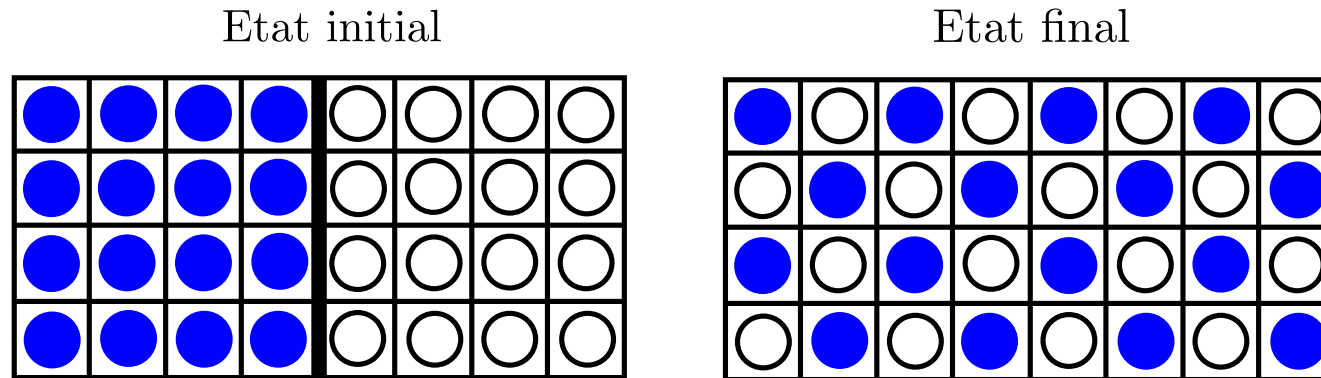
- **Formule logarithmique** : où $\ln \left(\frac{n}{e}\right)^n = n \ln n - n \ln e = n \ln n - n$

$$\ln n! \simeq \ln \left(\frac{n}{e}\right)^n + \ln (2\pi n)^{1/2} = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln (2\pi n) \quad (3.56)$$

- **Formule de Stirling logarithmique** : limite des grands nombres

$$(3.59)$$





- **Entropie de mélange** : gaz parfaits 1 et 2 : $N = N_1 + N_2$

$$S(N_1, N_2) = -N k_B \left(\frac{N_1}{N} \ln \left(\frac{N_1}{N} \right) + \frac{N_2}{N} \ln \left(\frac{N_2}{N} \right) \right) \quad (3.69)$$

- **Entropie de mélange** : (3.70)

$$S(N_1, N_2) = k_B (N \ln N - N - N_1 \ln N_1 + N_1 - N_2 \ln N_2 + N_2)$$

- **Entropie statistique** : formule de Stirling logarithmique

$$(3.72)$$

- **Energie atomique moyenne** : niveaux d'énergie E_i avec $p(E_i) = N_i/N$

$$\langle E \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{N_i}{N} E_i = \sum_{i=1}^{\infty} E_i p(E_i) \quad (3.75)$$

- **Energie atomique moyenne** : limite du continu

$$\langle E \rangle = \int_0^{\infty} E f_E(E) dE \quad (3.76)$$

- **Densité de probabilité énergétique de Maxwell-Boltzmann** :

$$f_E(E) = \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}} (\beta E)^{1/2} e^{-\beta E} \quad \text{où} \quad \beta = \frac{1}{k_B T} \quad (3.77)$$

- **Condition de normalisation** : probabilités

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f_E(E) dE &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} (\beta E)^{1/2} e^{-\beta E} d(\beta E) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.81)$$

- **Formule des compléments d'Euler** : démontrée en exercice

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad (3.11)$$

- **Formule** : évaluée en $z = 1/2$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi \quad \text{ainsi} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (3.12)$$

- **Condition de normalisation** : probabilités

$$\square \quad (3.82)$$

- **Energie atomique moyenne** : gaz parfait monoatomique

$$(3.84)$$